შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 105

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}$, $a+b+c=1$. $a, b, c \geq 0$

$\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}=\frac{1}{(a-1)^2+4}+\frac{1}{(b-1)^2+4}+\frac{1}{(c-1)^2+4}=$

$=\frac{1}{(b+c)^2+4}+\frac{1}{(c+a)^2+4}+\frac{1}{(a+b)^2+4} = \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+4}+\frac{(a+b+c)^2}{(a+c)^2+4}+\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)^2+4}=$

$=\frac{a^2+2ab+2ac-4}{(b+c)^2+4}+\frac{b^2+2ab+2bc-4}{(a+c)^2+4}+\frac{c^2+2ac+2bc-4}{(a+b)^2+4}-3 \geq -\frac{47}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5} \geq \frac{13}{20}$ და მიიღწევა

მაშინ, როცა: $a=b=0$ და $c=1$.

$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{13}{20}$.

პასუხი: $\frac{13}{20}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 105

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$f(x+y\cdot f(x)) = f(f(x)) + x\cdot f(y)$. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

ჩავსვათ $x=0$-ს:

$f(y\cdot f(0)) = f(f(0))$. სადაც $y\in\mathbb{R}$ და ნებისმიერია, ამიტომ ხდება

ა) ვთქვათ $f(0)\neq 0$, მაშინ: $\forall x$, $\exists y$, რომ $x=y\cdot f(0)$ და

გამოდის, რომ $f(x)=f(f(0))=const$, ნებისმიერი $x\in\mathbb{R}$-სთვის.

ანუ $f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$. მაშინ გვაქვს:

$a=a+x\cdot a$, $x\in\mathbb{R} \Rightarrow x\cdot a=0$ ნებისმიერი x-ისთვის.

ანუ $a=0$-ს. $\Rightarrow \boxed{f(x)=0}$.

ბ) ახლა ვთქვათ $f(0)=0$-ს.

ჩავსვათ $y=0$-ს, მივიღებთ:

$f(x)=f(f(x))+x\cdot f(0) \Rightarrow f(x)=f(f(x))$, $x\in\mathbb{R}$.

მაშინ გვაქვს: $f(x+y\cdot f(x)) = f(x)+x\cdot f(y)$.

ვთქვათ $x_1\in\mathbb{R}$-სთვის $f(x_1)=0$. მაშინ გვაქვს:

$f(x_1)=x_1\cdot f(y). \Rightarrow x_1\cdot f(y)=0$ – $y\in\mathbb{R}$. აქედან კი:

ან $x_1=0$ ან კიდევ $f(y)=0$ – ყოველი $y\in\mathbb{R}$-სთვის.

მეორე შემთხვევისას პასუხი ა) პუნქტში გვაქვს მი-
ღებული. ამიტომ I შემთხვევაში ვიღებთ, რომ:

ეს $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

ახლა კი ავიღოთ $x\in\mathbb{R}$ და $x\neq 0$-ს. ხოლო y კი
იყოს: $y=\frac{f(x)-x}{f(x)}$ (განსაზღვრულია, რადგან $x\neq0 \Rightarrow f(x)\neq 0$). მაშინ
გვაქვს: $f\left(x+f(x)\cdot\frac{f(x)-x}{f(x)}\right) = f(x) + x\cdot f\left(\frac{f(x)-x}{f(x)}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(f(x)) = f(x) + x\cdot f\left(\frac{f(x)-x}{f(x)}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\cdot f\left(\frac{f(x)-x}{f(x)}\right)=0$. x-ისთვის გვქონდა აღებული, რომ $x\neq 0$.

ანუ: $f\left(\frac{f(x)-x}{f(x)}\right)=0 \Rightarrow \frac{f(x)-x}{f(x)}=0 \Rightarrow f(x)=x$ – $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

ხოლო როცა $x=0$-ს – $f(0)=0 \Rightarrow$ კიდევ ერთი ამონახსნი $\boxed{f(x)=x}$

შემოწმება: $f(x)=0 \Rightarrow 0=0+0$. , $f(x)=x \Rightarrow x+yx=x+xy$.

ანუ ორივე პასუხი $\boxed{f(x)=0}$ და $\boxed{f(x)=x}$ სწორია.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

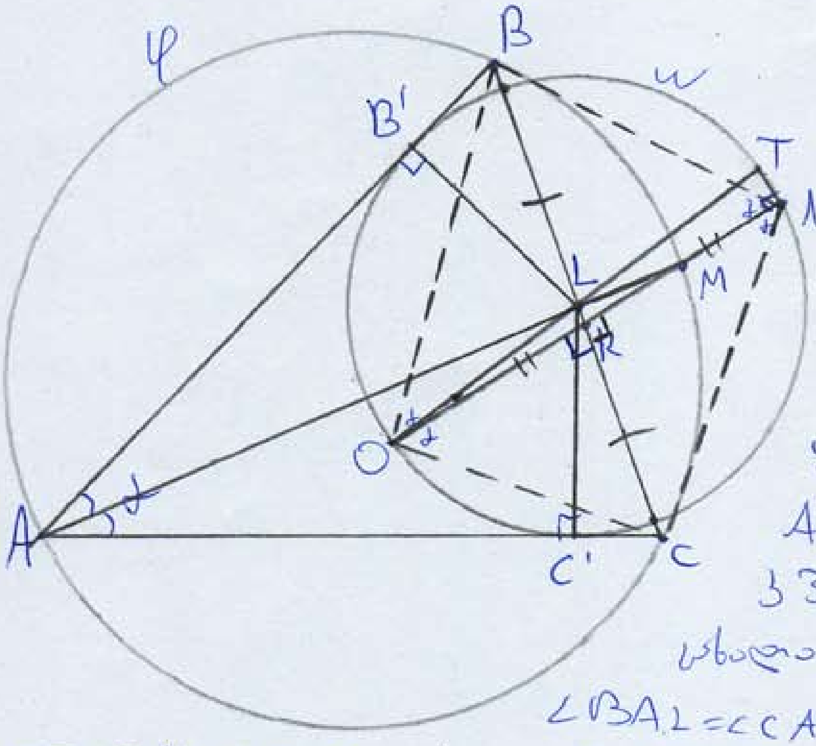
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 105

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



რადგანაც ω წრეწირი ეხება AB და AC გვერდებს ამიტომ მისი L ცენტრი ∠BAC ბისექტრისზეა და რადგანაც $L \in BC \Rightarrow L$ △ABC-ში A-დან გავლებული ბისექტრისის ფუძეა. ვთქვათ AL წრფე φ წრეწირს კვეთს M-ში. მაშინ ცხადია $\breve{BM} = \breve{MC}$, რადგან $\angle BAL = \angle CAL \Rightarrow$

$\Rightarrow$ OM, BC მართობული წრფეებია. $\Rightarrow \angle OKC = 90°$ და $BK = KC$. ვთქვათ OL კვეთს ω წრეწირს N-ში. მაშინ რადგანაც $BC \perp ON$ და $L \in BC \Rightarrow OK = KN$. ანუ OBNC რომბია.

$\angle BAC = \alpha = \frac{\breve{BC}}{2} \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow \angle BNC = 2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BON = \angle CON = \alpha$.

ვთქვათ OL წრფე კვეთს ω-ს T-ში $\Rightarrow$ OT დიამეტრია. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ONT = 90° \Rightarrow TN \parallel BC$, მაშინ LK △OTN-ის შუახაზია.

~~[illegible]~~ ადვილი შესამჩნევია აქედან, რომ:
~~[illegible]~~ $OL > \frac{OB}{2} \Rightarrow OT > OB \Rightarrow 2 \cdot R_\omega > R_\varphi$. და რადგანაც ω გადის φ-ს ცენტრზე $\Rightarrow$ T წერტილი φ-ს გარეთ იქნება ანუ ω φ-ს 2 წერტილში კვეთს.